学校编码: 10384
学　　号:x2006170009

分类号 ______ 密级 ______
UDC__________________

硕 士 学 位 论 文

量子环面导子李代数到其 Larsson 模的导子

Derivations of the derivation Lie algebra over quantum torus to its Larsson modules

姜 景 连

指 导 教 师: 谭绍滨 教 授
专 业 名 称: 应 用 数 学

论文提交日期: 2009 年 10 月
论文答辩日期: 2009 年 12 月
学位授予日期: 2009 年 　月

答辩委员会主席: ____________
评　　阅　　人: ____________

2009年 11 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果,均在文中以适当方式明确标明,并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范(试行)》。

另外,该学位论文为(　　　　　　　)课题(组)的研究成果,获得(　　　　　　　)课题(组)经费或实验室的资助,在(　　)实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称,未有此项声明内容的,可以不作特别声明。)

声明人(签名):

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

（ ）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打" √" 或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

目 录

Contents

摘 要

记 $\mathscr{U}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的以 $e_1=(1,\ 0), e_2=(0,\ 1)$ 为基的二维向量空间，$\Gamma=\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2$ 是一个格。当 $q=1$ 时，量子环面 $\mathbb{C}_q$ 上的内导子 $adx^n=0$。对 $r=r_1e_1+r_2e_2\in\Gamma, x^r=x_1^{r_1}x_2^{r_2}$，记 $D(u,\ r)=x^r(u_1d_1+u_2d_2)$，其中 $u=u_1e_1+u_2e_2\in\mathscr{U}$，$d_1, d_2$ 是 $\mathbb{C}_q$ 上的度导子。此时它的导子李代数为

$$\mathcal{L}=Span\{D(u,\ r)\mid u\in\mathscr{U}, r\in\Gamma\}.$$

李关系如下：

$$[D(u,\ r),\ D(v,\ s)]=D((u,\ s)v-(v,\ r)u,\ r+s)$$

其中 $u,\ v\in\mathscr{U}, r,\ s\in\Gamma$。由文 [5] 可得李代数 $\mathcal{L}$ 是 Γ 阶化的。而文 [2] 中定义的函子 F_g^α 就是 Larsson 函子 F^α，对于 gl_2 一模 V，我们记 $\mathcal{W}=F^\alpha(V)$，当然 $\mathcal{W}$ 也是 Γ 阶化的。本文利用有限维 sl_2 一模是完全可约的性质和 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{W}$ 的阶化性质以及文 [4] 知道，$\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{W}$ 的导子集 $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})$ 也是 Γ 阶化的，即

$$Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})=\bigoplus_{n\in\Gamma}Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n.$$

本文将 n 分为满足 $n+\alpha$ 等于 0 和不等于 0 两种情况，对不同的 sl_2 一模 V 的维数 $t=dimV$，分别计算 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{W}$ 的导子，定理 3.1 和引理 3.2 — 3.7 分别证明了：

(1) 当 $n+\alpha=0$ 且 $t=1$，$b=0$ 时，$dimDer(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n=3$，且 $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ 由外导子 $D_n^{i_1}$，$D_n^{i_2}$，$D_n^{i_3}$ 线性张成；

(2) $n+\alpha=0$ 且 $t=4$，$b=1$ 时，$dimDer(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n=5$，且 $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ 由 D_n^i，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，线性张成，其中 D_n^1 是外导子；其他为内导子；

(3) 其他情形，$Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ 都是内导子集。

关键词: 李代数，量子环面，导子，Larsson 函子，阶化模。

Abstract

Let $\mathscr{U}$ be a vector space over $\mathbb{C}$ with a basis $e_1 = (1,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1)$. $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ is a lattice. we denot $D(u,\ r) = x^r(u_1 d_1 + u_2 d_2)$, where $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \in \mathscr{U}$, $r = r_1 e_1 + r_2 e_2 \in \Gamma$, $x^r = x_1^{r_1} x_2^{r_2}$ 。$d_1,\ d_2$ are the degree derivations. If $q = 1$, the space of derivations of quantum torus $\mathbb{C}_q$ is

$$\mathcal{L} = Span\{D(u,\ r) \mid u \in \mathscr{U}, r \in \Gamma\}.$$

The Lie bracket is:

$$[D(u,\ r), D(v,\ s)] = D((u,\ s)v - (v,\ r)u,\ r + s).$$

where $u,\ v \in \mathscr{U}, r,\ s \in \Gamma$. From [5], we know that $\mathcal{L}$ is Γ-graded. The functor F_g^α defined in [2] is Larsson functor F^α in [3]. For gl_2-modules V, we denote $\mathcal{W} = F^\alpha(V)$, $\mathcal{W}$ is Γ-graded. From the complete reducibility of sl_2-modules and the fact that $\mathcal{L}$ and $\mathcal{W}$ are graded, we know that the space of derivations $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})$ is Γ-graded, by [4] that is

$$Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W}) = \bigoplus_{n \in \Gamma} Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n.$$

In this paper, we determine the derivations from $\mathcal{L}$ to $\mathcal{W}$. The proof is divided into two cases, One is for $n + \alpha = 0$, the other is for $n + \alpha \neq 0$. Our main result are given in theorem 3.1 and lemma 3.2 to lemma 3.7. That is:

(1) If $n+\alpha = 0$ and $t = 1$,$b = 0$, we have $dimDer(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n = 3$, and $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ is spanned by $D_n^{i_1},\ D_n^{i_2},\ D_n^{i_3}$, where $D_n^{i_j} (j = 1,\ 2,\ 3)$ is outer derivations;

(2) If $n + \alpha = 0$ and $t = 4$,$b = 1$, We have $dimDer(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n = 5$, and $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ is spanned by $D_n^1,\ D_n^2,\ D_n^3,\ D_n^4,\ D_n^5$, where D_n^1 is outer derivations; $D_n^i,\ (i = 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ are inner derivations.

(3) For other cases, $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ are all inner derivations.

Keywords: Lie algebra, quantum torus, derivation, graded module, Larsson functor.

第零章 引 言

李理论中在对导子和中心扩张的研究过程中发现由一些特定的代数的导子李代数、中心扩张或全形（即代数与它的导子的半直积）出发也可以构造许多有意义的李代数。比如，一元 Laurant 多项式环的全体导子构成的李代数称为 Witt 代数，而 Witt 代数的一维泛中心扩张后形成的新的李代数称为 Virasoro 代数。而一元 Laurant 多项式环与 Witt 代数的半直积可以看成一阶微分算子全体所构成的李代数。对李代数的导子李代数的研究还可以帮助我们了解该李代数在原始定义中没有体现出来的许多特性。因此，确定和研究李代数的导子李代数也是李理论中的一个重要课题。二十世纪四十年代，人们推广了完备群概念并引进了完备李代数，这种代数与李代数的导子和泛中心扩张的关系更加密切。对他们的结构和表示的研究也进一步推进了对李代数的导子和泛中心扩张的研究。孟道骥、姜翠波等人在这方面做了大量的工作。（参见 [9] 及其中的参考文献）

量子环面的导子李代数与 Virasoro 代数的推广存在着密切的联系。1994 年，Kirkman 等人研究了秩为 2 的量子环面 $\mathbb{C}_q$ 在 q 为 generic 的情形，得出它的导子集 $Der(\mathbb{C}_q)$ 是由内导子以及两个度导子 d_1, d_2 生成，并且得出它的内导子李代数是单代数，称为 Virasoro-like 代数的 q 类似（见 [8]）。并发现了它与 Virasoro-like 代数之间的关系，证明了这两种李代数都存在着非平凡的中心扩张。

林和谭在文 [10]、[2] 分别讨论了量子环面上的斜导子李代数和导子李代数的模的结构，王和谭在 [6] 中讨论了 $q=1$ 时量子环面上斜导子李代数到其 Larsson 模的导子集的结构。本文讨论 $q=1$ 时量子环面上导子李代数到其 Larsson 模的导子集的结构。

第一章是回顾量子环面的一些相关的基本知识。取定非零复数 q，量子环面 $\mathbb{C}_q$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的结合非交换代数，其生成元为 $x_1^{\pm1}, x_2^{\pm1}$，生成关系是：

$$x_2x_1 = qx_1x_2, x_ix_i^{-1} = x_i^{-1}x_i = 1, i = 1, 2$$

对 $r = r_1e_1 + r_2e_2 \in \Gamma$，$x^r = x_1^{r_1}x_2^{r_2}$ 。对于 $\mathbb{C}_q$ 上度导子 d_1, d_2，可以验证 $x^rd_i(i = 1, 2)$ 也是 $\mathbb{C}_q$ 上的导子。那么 $\mathbb{C}_q$ 的导子李代数

$$Der(\mathbb{C}_q) = Span\{D(u, r) \mid u \in \mathscr{U}, r \in rad(f)\} \oplus Span\{adx^n \mid n \notin rad(f)\}$$

其中 $D(u,r)=x^r(u_1d_1+u_2d_2)$，$\forall r\in rad(f), u\in\mathscr{U}$，文 [2] 证明了 $Der(\mathbb{C}_q)$ 关于以下括积运算构成一个李代数：

$$[adx^n,\ adx^m]=(\sigma(n,\ m)-\sigma(m,\ n))adx^{m+n},\forall n,\ m\notin rad(f);$$

$$[D(u,\ r),\ adx^m]=(u,\ n)\sigma(r,\ n)adx^{r+n},\forall m\notin rad(f), r\in rad(f), u\in\mathscr{U};$$

$$[D(u,\ r),\ D(v,\ s)]=\sigma(r,\ s)D((u,\ s)v-(v,\ r)u,\ r+s), u,\ v\in\mathscr{U}, r,\ s\in rad(f).$$

当 $q=1$ 时，它的内导子 $adx^n=0$，那么 $Der(\mathbb{C}_q)$ 变为

$$\mathcal{L}=Span\{D(u,r)\mid u\in\mathscr{U}, r\in\Gamma\}.$$

此时，文 [2] 构造的 $Der(\mathbb{C}_q)$ 一模 $F_g^{\alpha}(V)$ 就是文 [3] 构造的 Larsson 摸 $F^{\alpha}(V)$，本文记为 $\mathcal{W}$。

第二章利用有限维 sl_2- 模的完全可约性质和量子环面的导子李代数及其模的都是 Γ- 阶化的性质，根据文 [4] 可得 $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})$ 也是 Γ- 阶化。本章根据导子的线性性，将 n 分为满足 $n+\alpha$ 等于 0 和不等于 0 两种情况，分别计算 n 次导子集中的导子 D_n 对 $D(e_1,r)$ 和 $D(e_2,r)$ 的作用，找出这些表达式中系数的关系。

第三章是根据第二章的结果，按 sl_2 的不可约模的维数 t 的不同取值，分别讨论 n 次导子集的结构。 本文的主要结果在定理 3.1 和引理 3.2-3.7 中表述并证明：

(1) 当 $n+\alpha=0$ 且 $t=1$, $b=0$ 时，得到 $dimDer(\mathcal{L},\mathcal{W})_n=3$，且 $Der(\mathcal{L},\mathcal{W})_n$ 由外导子 $D_n^{i_1}, D_n^{i_2}, D_n^{i_3}$ 线性张成；

(2) $n+\alpha=0$ 且 $t=4$，$b=1$ 时，得到 $dimDer(\mathcal{L},\mathcal{W})_n=5$，且 $Der(\mathcal{L},\mathcal{W})_n$ 由 $D_n^i, i=1,2,3,4,5$，线性张成，其中 D_n^1 是外导子，其他为内导子；

(3) 其他情形，得到 $Der(\mathcal{L},\mathcal{W})_n$ 都是内导子集。

最后，推论 3.8 描述了 $\mathcal{L}$ 的系数在模 $\mathcal{W}$ 中的 1- 上同调群的维数。

第一章　预备知识

记 $\mathscr{U}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的以 $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ 为基的二维向量空间，在 $\mathscr{U}$ 上定义双线性型 $(.,.)$，使得 $(e_i,e_j)=\delta_{ij}(1\le i\le j\le 2)$，令 $\Gamma=\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2$ 是一个格，$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus 0$。取定非零复数 q，量子环面 $\mathbb{C}_q$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的结合非交换代数，其生成元为 $x_1^{\pm 1},x_2^{\pm 1}$，生成关系是：

$$x_2x_1=qx_1x_2,x_ix_i^{-1}=x_i^{-1}x_i=1,i=1,2$$

对 $n=n_1e_1+n_2e_2\in\Gamma$，记 $x^n=x_1^{n_1}x_2^{n_2}$，定义 $\Gamma\times\Gamma$ 到 $\mathbb{C}$ 上的两个映射 σ,f 定义如下：$\forall n,m\in\Gamma$，$\sigma(n,m)=q^{n_2m_1},f(n,m)=q^{n_2m_1-n_1m_2}$，$\forall n,m\in\Gamma$，而且 $x^nx^m=\sigma(n,m)x^{n+m}$。定义 f 的根基为：

$$rad(f)=\{n\in\Gamma\mid f(n,m)=1,\forall m\in\Gamma\}.$$

则有

$$\sigma(n,m)=\sigma(m,n)=1,\forall n\in rad(f),m\in\Gamma.$$

$\mathbb{C}_q$ 上的内导子记为 adx^n，度导子 d_1,d_2 满足：$d_i(x^n)=n_ix^n(i=1,2)$，可以验证 $x^nd_i(i=1,2)$ 也是 $\mathbb{C}_q$ 上的导子。$\forall n\in rad(f),u\in\mathscr{U}$，记 $D(u,n)=x^n(u_1d_1+u_2d_2)$，那么 $\mathbb{C}_q$ 的导子李代数

$$Der(\mathbb{C}_q)=Span\{D(u,r)\mid u\in\mathscr{U},r\in rad(f)\}\oplus Span\{adx^n\mid n\notin rad(f)\}$$

文 [2] 证明了 $Der(\mathbb{C}_q)$ 关于以下括积运算构成一个李代数：

$$[adx^n,\ adx^m]=(\sigma(n,\ m)-\sigma(m,\ n))adx^{m+n},\forall n,\ m\notin rad(f);$$

$$[D(u,\ r),\ adx^n]=(u,\ n)\sigma(r,\ n)adx^{r+n},\forall n\notin rad(f),r\in rad(f),u\in\mathscr{U};$$

$$[D(u,\ r),\ D(v,\ s)]=\sigma(r,\ s)D((u,\ s)v-(v,\ r)u,\ r+s),u,\ v\in\mathscr{U},r,\ s\in rad(f).$$

称 $Der(\mathbb{C}_q)$ 为量子环面 $\mathbb{C}_q$ 的导子李代数。而且有

引理 1.1.(见 [5] 引理 2.48)　$Der(\mathbb{C}_q)$ 是 Γ 阶化的，即

$$Der(\mathbb{C}_q)=\bigoplus_{n\in\Gamma}Der(\mathbb{C}_q)_n,$$

而且

$$Der(\mathbb{C}_q)_n)=\begin{cases}\mathbb{C}adx^n, & n\notin rad(f);\\ \bigoplus_{i=1}^2\mathbb{C}x^nd_i, & n\in rad(f);\end{cases}$$

定义 1.2. 记 L 是一个李代数，V 是 L 一模，设 D 是 L 到 V 上的一个线性映射，$\forall u,v\in L$, 满足

$$D([u,v])=u.D(v)-v.D(u) \tag{1.1}$$

则称 D 为李代数 L 到 L - 模 V 的导子.

特别地，形如 $D(u)=u.v,\forall u\in L$ 的导子（其中 v 是 V 中的固定元素），称为 L 到 L- 模 V 的内导子, 不是内导子的导子称为外导子。

如果 L 是一个 G- 阶化李代数，其中 G 是加群，V 是 G 阶化的 L- 模，即 $L=\bigoplus_{x\in G}L_x, V=\bigoplus_{x\in G}V_x$ 且 $D(L_y)\subset V_{x+y},\forall y\in G$, 则称 D 是 x 次的导子。

记 $Der(L,V)$ 表示 L 到 L- 模 V 的所有导子的集合，$Inn(L,V)$ 表示 L 到 L- 模 V 的所有内导子的集合，$Out(L,V)$ 表示 L 到 L- 模 V 的所有外导子的集合，$Der(L,V)_x$ 表示 L 到 V 的所有 x 次的导子的集合。

事实上, 对任意 L- 模 V,1- 上同调群 $H^1(L,\ V)$ 就是全体外导子的集合（参见 [7]），即

$$H^1(L,\ V)\cong Der(L,V)/Inn(L,\ V)$$

引理 1.3.(参见 [4]) 设 G 是加群，$L=\bigoplus_{x\in G}L_x$ 是一个有限生成的 G- 阶化李代数，$V=\bigoplus_{x\in G}V_x$ 是一个 G 阶化的 L- 模，，那么

$$Der(L,\ V)=\bigoplus_{x\in G}Der(L,\ V)_x.$$

记 gl_2 为复数域上的 2 阶矩阵构成的一般线性李代数。sl_2 是迹零 2 阶矩阵构成的特殊线性李代数，它是一个有限维单李代数；I_2 为 2 阶单位矩阵。令 E_{ij} 表示 $(i,\ j)$ 元素是 1，其余元素是 0 的 2 阶矩阵，则 $\{E_{ij}(i,\ j=1,\ 2)\}$ 构成 gl_2 的一组基。设 E 是对角矩阵全体构成的 gl_2 的交换子代数，$\mathfrak{h}=E\cap sl_2$，则 $\mathfrak{h}$ 是单李代数 sl_2 的 Cartan 子代数，$\alpha=E_{11}-E_{22}$ 是它的一组基，$\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间，它有一组基 δ_1，其中 $\delta_1(\alpha)=1$, 设 $\psi\in\mathfrak{h}^*$，如果 $\psi(\alpha)$ 是非负整数，则称 ψ 为支配整权。我们知道，sl_2 的有限维不可约模与支配整数权是一一对应的，设 $V(\lambda)$ 是对应支配

整数权 λ 的有限维不可约 sl_2 一模；若对应于 I_2 的作用为复数 b，那么 $V(\lambda)$ 对应的 gl_2 一模记为 $V(\lambda,\ b)$，且若 $dimV(\lambda)=t$，那么 $dimV(\lambda,\ b)=t$。

记 $e=E_{12}, f=E_{21}, h=E_{11}-E_{22}$，它们是 sl_2 的 Chevalley 基，I_2 是二阶单位矩阵，则以下关系式成立：

$$\begin{cases} h.v_j=(t+1-2j)v_j \\ f.v_j=jv_{j+1} \\ e.v_j=(t-j+1)v_{j-1} \\ I_2.v_j=bv_j \end{cases}$$

其中 $v_1, v_2, \cdots, v_t$ 为 sl_2 一模 $V(\lambda)$ 的一组基，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ t$。文 [2] 构造了一个 gl_2 一模到 $Der(\mathbb{C}_q)$ 一模的映射如下：

定义 1.4.　对 $\alpha\in\mathscr{U}$ 和函数 $g:\Gamma\to\mathbb{C}^*$ 我们定义映射：

$$F_g^\alpha: gl_2-\text{模}\to Der(\mathbb{C}_q)-\text{模}$$
$$V\mapsto F_g^\alpha(V)=V\otimes\mathbb{C}_q=\bigoplus_{n\in\Gamma}V(n)$$

其中 $V(n)=V\otimes x^n, \forall n\in\Gamma$，函数 g 满足：

$$g(m)g(n)=g(m+n),\ g(s)=1,\ \forall n,\ m\in\Gamma,\ s\in rad(f).$$

$Der(\mathbb{C}_q)$ 的作用为：

$$adx^s.v(n)=\sigma(s,\ n)(g(s)-f(n,\ s))v(n+s),$$
$$D(u,\ r).v(n)=(u,\ n+\alpha)v(n+r)+(\textstyle\sum_{i,j}u_ir_jE_{ji}v)(n+r).$$

其中 $v(n):=v\otimes x^n\in V(n), n\in\Gamma, u\in\mathscr{U},\ r\in rad(f),\ s\notin rad(f),\ v\in V.$

注记 1.5.(参见 [2])　*由定义 1.4, 可得下列结果:*

(i) 当 $q=1$ 时，F_g^α 是从 gl_2- 模到 $Der(\mathbb{C}_q)$- 模的 Larsson 函子 F^α.

(ii) 设 $V_1,\ V_2$ 都是 gl_2- 模, 则 $F^\alpha(V_1\oplus V_2)=F^\alpha(V_1)\oplus F^\alpha(V_2)$.

(iii) 设 $V(\lambda,\ b)$ 是有限维 gl_2- 模, 则 $F_g^\alpha(V(\lambda,b))$ 是关于 Cartan 子代数 $\{D(u,\ 0)\mid u\in\mathscr{U}\}$ 的 L 权模, 且它的权子空间的维数等于 $V(\lambda,\ b)$ 的维数.　□

本文考虑当 $q=1$ 时，量子环面导子李代数 $Der(\mathbb{C}_q)$ 到它的模 $F_g^\alpha(V(\lambda,\ b))$ 的导子。由于 $\mathbb{C}_q$ 的生成关系变为：

$$x_2x_1=x_1x_2,\ x_ix_i^{-1}=x_i^{-1}x_i=1,\ i=1,\ 2$$

以及它的内导子 $adx^n = 0$，此时 $\mathbb{C}_q$ 就是 2 个变元的交换 Laurent 多项式代数，记为 $\mathcal{L} = Span\{D(u,\ r) \mid u \in \mathscr{U},\ r \in \Gamma\}$。同时称定义 1.4 中的 $Der(\mathbb{C}_q)$ 一模 $F_g^{\alpha}(V(\lambda,\ b))$ 为 $\mathcal{L}$ 的 Larsson 模，记为 $\mathcal{W}$。从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}$ 一模 $\mathcal{W}$ 的导子集记为 $Der(\mathcal{L},\mathcal{W})$。本文主要讨论它的结构。

第二章　量子环面导子李代数到它的 Larsson 模的导子

由于每一个有限维 sl_2 一模都是完全可约的，所以讨论 $\mathcal{L}$ 一模 $\mathcal{W}=F^{\alpha}(V(\lambda,\ b))$ 时，只须考虑 $V(\lambda)$ 是不可约模的情形。设 $V(\lambda)$ 是 sl_2 的 t 维不可约模，并设 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_t$ 为 $V(\lambda)$ 的一组基。对于 $n\in\Gamma$，记 $v(n):=v\otimes x^n\in V(n)$，则 $v_1(n),\ v_2(n),\ \cdots,\ v_t(n)$ 就是 $\mathcal{W}$ 的 n 次子空间 $\mathcal{W}_n$ 的基。
我们知道 $\mathcal{L}$ 是有限生成的，所以根据引理 1.3 有：

$$Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})=\bigoplus_{n\in\Gamma}Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$$

其中 $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ 是 $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})$ 的 n 次阶化子空间，且

$$Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n=\{D\in Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n \mid D(\mathcal{L}_m)\subset\mathcal{W}_{m+n}\}$$

以下我们对 n 的不同取值情况讨论阶化子空间 $Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$ 的结构和维数。

对于 $D_n\in Der(\mathcal{L},\ \mathcal{W})_n$，必有

$$D_n(D(u,\ m))=u_1D_n(D(e_1,m))+u_2D_n(D(e_2,\ m)).$$

也就是说，我们只要求出 $D_n(D(e_1,\ m))$ 和 $D_n(D(e_2,\ m))$ 的表达式即可。设

$$D_n(D(e_i,\ m)=\sum_{j=1}^{t}\varphi_{ij}(n,\ m)v_j(m+n)$$

其中 $m\in\Gamma$; $i=1,\ 2$，$\varphi_{ij}(n,\ m)$ 是 $\Gamma\times\Gamma$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射，规定 $\varphi_{i,0}(n,m)=\varphi_{i,t+1}(n,\ m)=0,\forall m\in\Gamma,\ i=1,\ 2$。

对于 $m=m_1e_1+m_2e_2$; $m'=m_1'e_1+m_2'e_2\in\mathbb{Z}^2$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ t$，在等式 (1.1) 中分别令 $u=D(e_1,\ m),v=D(e_1,\ m')$；$u=D(e_1,\ m),v=D(e_2,\ m')$；$u=D(e_2,\ m),\ v=D(e_2,\ m')$ 可得以下等式成立：

$$\begin{gathered}(m_1'-m_1)\varphi_{1j}(n,m+m')\\ =[m_1'+n_1+\alpha_1+\tfrac{1}{2}m_1(t+1-2j+b)]\varphi_{1j}(n,m')\\ +m_2(j-1)\varphi_{1,j-1}(n,m')-[m_1+n_1+\alpha_1+\tfrac{1}{2}m_1'\\ (t+1-2j+b)]\varphi_{1j}(n,m)-m_2'(j-1)\varphi_{1,j-1}(n,m).\end{gathered}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}&-m_2\varphi_{1j}(n,m+m')+m_1'\varphi_{2j}(n,m+m')\\&=[m_1'+n_1+\alpha_1+\tfrac{1}{2}m_1(t+1-2j+b)]\varphi_{2j}(n,m')\\&+m_2(j-1)\varphi_{2,j-1}(n,m')-[m_2+n_2+\alpha_2+\tfrac{1}{2}\\&m_2'(b-t-1+2j)]\varphi_{1j}(n,m)-m_1'(t-j)\varphi_{1,j+1}(n,m).\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}&(m_2'-m_2)\varphi_{2j}(n,m+m')\\&=[m_2'+n_2+\alpha_2+\tfrac{1}{2}m_2(b-t-1+2j)]\varphi_{2j}(n,m')\\&+m_1(t-j)\varphi_{2,j+1}(n,m')-[m_2+n_2+\alpha_2+\tfrac{1}{2}\\&m_2'(b-t-1+2j)]\varphi_{2j}(n,m)-m_1'(t-j)\varphi_{2,j+1}(n,m).\end{aligned}\tag{2.3}$$

当 $n+\alpha=0$ 时，在等式（2.1）（2.2）（2.3）中分别

（1）令 $m=m_1e_1,m'=m_2e_2$ 可得：

$$\begin{aligned}&m_1\varphi_{1j}(n,m_1e_1+m_2e_2)\\&=-\tfrac{1}{2}m_1(t+1-2j+b)]\varphi_{1j}(n,m_2e_2)\\&+m_1\varphi_{1j}(n,m_1e_1)+m_2(j-1)\varphi_{1,j-1}(n,m_1e_1),\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$m_1(t+1-2j+b)\varphi_{2j}(n,m_2e_2)=m_2(b-t-1+2j)]\varphi_{1j}(n,m_1e_1),\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}&m_2\varphi_{2j}(n,m_1e_1+m_2e_2)\\&=m_2\varphi_{2j}(n,m_2e_2)+m_1(t-j)\varphi_{2,j+1}(n,m_2e_2)\\&-\tfrac{1}{2}m_2(b-t-1+2j)\varphi_{2j}(n,m_1e_1).\end{aligned}\tag{2.6}$$

（2）令 $m=m_1e_1,m'=e_1$ 可得：

$$\begin{aligned}&(1-m_1)\varphi_{1j}(n,(m_1+1)e_1)\\&=[1+\tfrac{1}{2}m_1(t+1-2j+b)]\varphi_{1j}(n,e_1)\\&-[m_1+\tfrac{1}{2}(t+1-2j+b)]\varphi_{1j}(n,m_1e_1),\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\varphi_{2j}(n,(m_1+1)e_1)=[1+\frac{1}{2}m_1(t+1-2j+b)]\varphi_{2j}(n,e_1)-(t-j)\varphi_{1,j+1}(n,m_1e_1),\tag{2.8}$$

$$\varphi_{2,j+1}(n,m_1e_1)=m_1\varphi_{2,j+1}(n,e_1).\tag{2.9}$$

（3）令 $m=e_2,m'=m_2e_2$ 可得：

$$\varphi_{1,j-1}(n,m_2e_2)=m_2\varphi_{1,j-1}(n,e_2),\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_{1j}(n,(m_2+1)e_2)\\&=[1+\tfrac{1}{2}m_2(b-t-1+2j)]\varphi_{1j}(n,e_2)-(j-1)\varphi_{2,j-1}(n,m_2e_2),\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}&(m_2-1)\varphi_{2j}(n,(m_2+1)e_2)\\=&[m_2+\tfrac{1}{2}(b-t-1+2j)]\varphi_{2j}(n,m_2e_2)\\&-[1+\tfrac{1}{2}m_2(b-t-1+2j)]\varphi_{2j}(n,e_2).\end{aligned}\tag{2.12}$$

引理 2.1. 若 $n+\alpha=0$, 且 $t>1$, 那么 $\varphi_{11}(n,e_2)=0,\varphi_{2t}(n,e_1)=0$;

证明: 情形 1：当 $b\neq t+1$ 时, 在等式 (2.8) 中令 $j=t$, (2.9) 中令 $j=t-1$ 二式综合有

$$m_1(b-t-1)\varphi_{2t}(n,e_1)=0,\forall m_1\in\mathbb{Z}.$$

在等式 (2.11) 中令 $j=1$, (2.10) 中令 $j=2$ 有

$$m_2(b-t-1)\varphi_{11}(n,e_2)=0,\forall m_2\in\mathbb{Z}.$$

所以当 $b\neq t+1$ 时 $\varphi_{11}(n,e_2)=0,\varphi_{2t}(n,e_1)=0.$

情形 2：当 $b=t+1$ 时, 取 $m=m_1e_1+e_2,m^{'}=e_1$ 代入 (2.1)，当 $j=1$ 时可得：

$$\begin{aligned}&(1-m_1)\varphi_{11}(n,(m_1+1)e_1+e_2)\\=&(1+m_1t)\varphi_{11}(n,e_1)-(m_1+t)\varphi_{11}(n,(m_1+1)e_1).\end{aligned}$$

再应用 (2.4)、(2.7) 可得：

$$-t(1-m_1)\varphi_{11}(n,e_2)+(1+m_1t)\varphi_{11}(n,e_1)-(m_1+t)\varphi_{11}(n,m_1e_1)$$

$$=(1+m_1t)\varphi_{11}(n,e_1)+(m_1+t)t\varphi_{11}(n,e_2)-(m_1+t)\varphi_{11}(n,m_1e_1).$$

所以

$$(t^2+t)\varphi_{11}(n,e_2)=0.$$

同理取 $m=e_2,m^{'}=e_1+m_2e_2$ 代入 (2.3)，再应用 (2.6)、(2.12) 当 $j=t$ 时可得：

$$(t^2+t)\varphi_{2t}(n,e_1)=0.$$

所以，当 $b=t+1$ 时，结论也成立。 □

引理 2.2. 若 $n+\alpha=0$ 且, 那么当 $t>2$ 且 $b=t-1$ 时,

若 $m_1\neq0$ 时, 等式 $\varphi_{11}(n,-m_1e_1)+\varphi_{11}(n,m_1e_1)=0$ 成立;
若 $m_2\neq0$ 时, 等式 $\varphi_{2t}(n,-m_2e_2)+\varphi_{2t}(n,m_2e_2)=0$ 成立;